工業数理基礎

（全　問　必　答）

第１問　〔解答記号 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$〕（配点　30）

以下の空欄のうち，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ には，それぞれの解答群から最も適当なものを選んでマークし，それ以外には，当てはまる数字をマークせよ。

問１　試料表面の微小な凹凸の計測を行うため，コンデンサを応用したセンサについて考えてみよう。コンデンサ（図１(a)）の静電容量 C は，電極面積を S，電極間距離を D，電極間の媒質の誘電率を ε とすると，式(1)で表される。ここで ε，S は一定である。

$$C = \frac{\varepsilon S}{D} \tag{1}$$

図１(b)に示すように，二枚の電極の間にもう一枚電極を挿入すると，二つの直列したコンデンサが形成される。ここで，上下のコンデンサの静電容量をそれぞれ C_1，C_2 と表す。さらに，図１(c)に示すように，中央の電極を可動式とし，取り付けた探針の上下動にしたがって動くようにした。

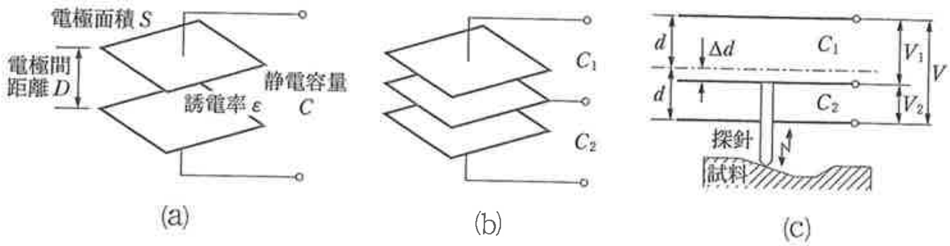


図１

上下の電極間距離 D を $2d$ に固定し，可動電極がその中心から距離 Δd 移動したとする。このときの C_1，C_2 は式(2)で表される。ただし，下方に電極が移動したときに $\Delta d > 0$ であるとする。

$$C_1 = \varepsilon S\left(\frac{1}{d + \Delta d}\right),\quad C_2 = \varepsilon S\left(\boxed{\text{ア}}\right) \tag{2}$$

上下の固定電極間に電圧 V を加えると，それぞれのコンデンサの両端にかかる電圧 V_1，V_2 と V の関係は

$$V = V_1 + V_2 \tag{3}$$

となる。それぞれのコンデンサに蓄えられる電荷量 Q は等しいので，

$$Q = C_1V_1 = C_2V_2 \tag{4}$$

である。式(3)と式(4)を使って，V_1，V_2 を V，C_1，C_2 で表すと，

$$V_1 = \boxed{\text{イ}}\,V,\quad V_2 = \boxed{\text{ウ}}\,V \tag{5}$$

が得られる。したがって，電圧の差 $\Delta V = V_1 - V_2$ は，式(6)で表される。

$$\Delta V = \boxed{\text{エ}}\,V \tag{6}$$

式(2)を式(6)に代入すれば，電圧の差 ΔV と移動した距離 Δd の関係式

$$\Delta d = \frac{d}{V}\Delta V \tag{7}$$

が得られる。例えば，$d = 5.0\ \mathrm{mm}$，$V = 2.0\ \mathrm{V}$ とすると，電圧の差 $\Delta V = 4.0\ \mathrm{mV}$ であれば，探針が移動した距離 Δd は，$\boxed{\text{オカ}}$ μm と求まる。

図 1 (C)は差動式容量センサと呼ばれ，試料表面の微小な凹凸を計測する装置に用いられる。探針を試料に接触させ試料を水平に動かせば，試料表面形状にそって探針が上下し，その結果現れる電圧の差 ΔV の変化から，試料表面の凹凸形状を知ることができる。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ d	① Δd	② $\dfrac{1}{d + \Delta d}$	③ $\dfrac{1}{d - \Delta d}$
④ $\dfrac{\Delta d}{d - \Delta d}$	⑤ $\dfrac{\Delta d}{d + \Delta d}$	⑥ $\dfrac{d}{d + \Delta d}$	⑦ $\dfrac{d}{d - \Delta d}$
⑧ $\dfrac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1}$	⑨ $\dfrac{C_2 + C_1}{C_2 - C_1}$	ⓐ $\dfrac{C_1}{C_2 - C_1}$	ⓑ $\dfrac{C_2}{C_2 - C_1}$
ⓒ $\dfrac{C_1}{C_2 + C_1}$	ⓓ $\dfrac{C_2}{C_2 + C_1}$		

問 2　構造物の設計では，構造物そのものに作用する重力(自重)を考慮しなければならない。図 2 のような，一端を壁に埋め込んだ形のはり(片持ばり)に自重のみが作用する場合を考えてみよう。図 2 の点 A で曲げモーメントが最大となるので，ここが壊れないように，はり断面の設計をする必要がある。

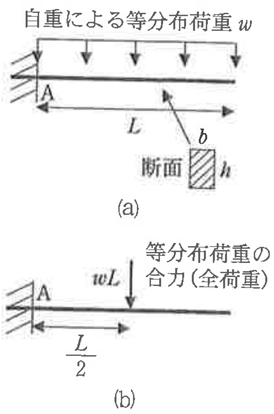


図 2

重力加速度 g〔m/s^2〕，材料密度 ρ〔kg/m^3〕，はり幅 b〔m〕，はりせい(断面の高さ方向の長さ)h〔m〕とする。自重は一様に分布する荷重(等分布荷重)として表され，はりの単位長さ当たりの荷重 w〔N/m〕は次式のようになる。

$$w = \rho g b h \qquad (8)$$

はりの長さを L〔m〕とすると，点 A の曲げモーメントの大きさ M_A〔N･m〕は，自重の合力(全荷重)wL〔N〕が，はりの中央に作用していると考えられるので，次のようになる。

$$M_A = \boxed{\text{キ}} \times w \qquad (9)$$

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ $\frac{L}{2}$　① $\frac{L^2}{2}$　② $\frac{L}{4}$　③ $\frac{L^2}{4}$

点 A の曲げ応力(曲げによって生じる応力)σ_A〔Pa〕は，断面係数(断面形状の性質を表す係数)$Z = \frac{bh^2}{6}$〔m^3〕を用いて次の式で表される。

$$\sigma_A = \frac{M_A}{Z} = \frac{6}{bh^2} \times M_A \qquad (10)$$

式(8)〜式(10)から次式が得られる。

$$\sigma_A = \boxed{\text{ク}} \qquad (11)$$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $\frac{3\rho g b L}{2h}$　① $\frac{3\rho g L^2}{2h}$　② $\frac{3\rho g b L}{h}$　③ $\frac{3\rho g L^2}{h}$

式(11)から，はりの形状と曲げ応力との関係を考えてみよう。点Aの曲げ応力が等しくなるようにして，同一の材料を用いて2倍の長さのはりを作製するためには，4倍の $\boxed{ケ}$ が必要になる。$\boxed{コ}$ は点Aの曲げ応力には影響しない。

$\boxed{ケ}$・$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ はりせい　① はりの長さ　② はり幅　③ 材料密度

コンクリートを用いて，長さ $L = 10\,\mathrm{m}$ の片持ばりを作製するために必要なはりせいを求めよう。コンクリートの密度と曲げ強度は表1のとおりである。重力加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。σ_A が材料の曲げ強度 σ〔Pa〕に一致するときのはりせいは，$h = \boxed{サ}.\boxed{シ} \times 10^{\boxed{ス}}$ cm となる。

表1　コンクリートの密度と曲げ強度

密度 ρ〔$\mathrm{kg/m^3}$〕	2.4×10^3
曲げ強度 σ〔Pa〕	2.8×10^6

第２問 〔解答記号 $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{セ}$ 〕(配点　38)

以下の空欄のうち，$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ケ}$，$\boxed{シ}$ ～ $\boxed{セ}$ には，それぞれの解答群から最も適当なものを選んでマークし，それ以外には，当てはまる数字をマークせよ。

自動車が直線道路やカーブを走行する場合を考えてみよう。以下では，道路は水平で凹凸がないものとし，重力加速度は $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする。

問１　直線道路上のある地点で静止していた自動車が，一定の加速度 a_1〔$\mathrm{m/s^2}$〕で加速し，出発時から t_1〔s〕後に速さ v_1〔m/s〕に達した。その後，自動車はそのまま v_1 で等速直線運動を行い，出発時から t_2〔s〕後に一定の加速度で減速し，t_3〔s〕後に停止した。この自動車の運動を，縦軸を速さ，横軸を時間にとり，速さ－時間線図に表すと $\boxed{ア}$ となる。出発時から t_1 秒間における加速度 a_1〔$\mathrm{m/s^2}$〕は，速さ－時間線図の $\boxed{イ}$ に対応し，出発時から t_1 秒間に自動車が走行した距離 L〔m〕は，速さ－時間線図における $\boxed{ウ}$ に対応している。したがって，a_1 と L はそれぞれ $a_1 = \boxed{エ}$，$L = \boxed{オ}$ と表される。

一般的に加速度と走行距離は，それぞれ速さの時間に関する微分と積分から求めることができる。直線道路上のある地点を時間 $t = 0$ s に出発した自動車の速さ v〔m/s〕が次式にしたがって変化し，t_1〔s〕後に速さ v_1〔m/s〕に達したとする。

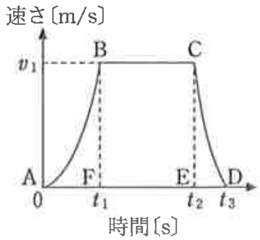
$$v(t) = -\frac{v_1}{{t_1}^2}(t - t_1)^2 + v_1$$

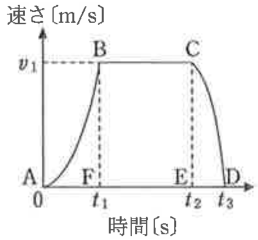
この間のある時間 t ($0 \leqq t \leqq t_1$) における加速度 $a(t)$〔$\mathrm{m/s^2}$〕と出発時から t_1 秒間に走行した距離 L〔m〕は，以下のようになる。

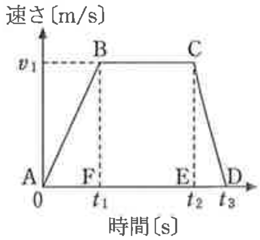
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{-\frac{v_1}{{t_1}^2}(t^2 - 2t_1t + {t_1}^2) + v_1\right\} = \boxed{カ}$$

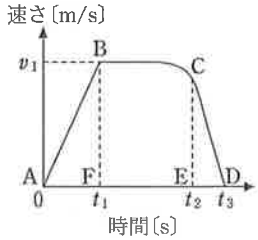
$$L = \int_0^{t_1} v(t)\,dt = -\int_0^{t_1}\frac{v_1}{{t_1}^2}(t^2 - 2t_1t + {t_1}^2)\,dt + \int_0^{t_1} v_1\,dt = \boxed{キ}$$

ア の解答群

⓪


①


②


③


イ ・ **ウ** の解答群

⓪ 線分 AB の長さ　① 線分 AB の傾き　② 線分 AB の中点
③ 図形 ABF の面積　④ 図形 ABCD の面積　⑤ 図形 ABCE の面積

エ ・ **オ** の解答群

⓪ $\dfrac{v_1}{t_1}$　① $\dfrac{v_1}{2t_1}$　② $\dfrac{2v_1}{t_1}$　③ $\dfrac{1}{2}v_1t_1$
④ v_1t_1　⑤ $2v_1t_1$

カ ・ **キ** の解答群

⓪ $\dfrac{v_1}{t_1^{\,2}}(t_1-t)$　① $\dfrac{v_1}{2t_1^{\,2}}(t_1-t)$　② $\dfrac{2v_1}{t_1^{\,2}}(t_1-t)$
③ $\dfrac{v_1}{t_1^{\,3}}(t_1-t)^2$　④ $\dfrac{1}{3}v_1t_1$　⑤ $\dfrac{2}{3}v_1t_1$
⑥ v_1t_1　⑦ $\dfrac{4}{3}v_1t_1$

工業数理基礎

問 2　自動車(質量 M〔kg〕)が半径 R〔m〕の半円状カーブを安全に走行するための速さの条件について考えてみよう(図 1)。カーブを走行中の速さ v_2〔m/s〕は一定で，$v_2 > 0$ とする。カーブを走行している間，自動車には，みかけの力として遠心力 F_C〔N〕$= \dfrac{Mv_2^2}{R}$ が働き，その向きはカーブの中心(点 O)と自動車を結ぶ半径方向の外向きである。また，タイヤと路面との間には摩擦力が働いており，その最大値 F_μ〔N〕は M，g および摩擦を特徴づける係数 μ を用いて，$F_\mu = \mu Mg$ と表される。遠心力 F_C と最大の摩擦力 F_μ が $\boxed{\text{ク}}$ の条件を満たすとき，自動車は遠心力の向きに横滑りを起こす。したがって，自動車がカーブにそって走行できる限界の速さは $\boxed{\text{ケ}}$ となる。例えば，$\mu = 0.50$ の路面(ぬれた路面に相当)の場合，自動車が $R = 10$ m のカーブにそって走行できる限界の速さは時速 $\boxed{\text{コサ}}$ km/h である。

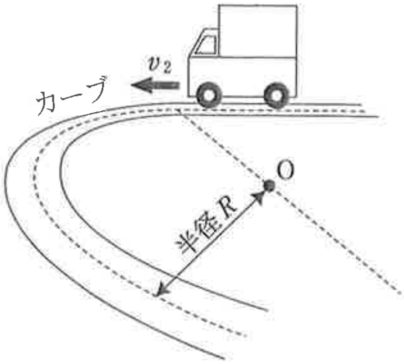


図 1

カーブでは上で考えた横滑りの危険性に加え，遠心力によって車体が横転する危険性もある。図 2 はカーブを走行中の自動車を正面から見たものである。カーブの外側のタイヤと路面との接点を P とし，自動車の重心 G は，接点 P から鉛直上方に h〔m〕，水平方向でカーブの内側に w〔m〕のところにあるとする。また，タイヤと路面との摩擦は十分に大きく，タイヤは滑らないものとする。点 G には遠心力 F_C と重力 $F_G = Mg$〔N〕が働いている(図 2)。F_C は車体を接点 P のまわりに回転させ，横転させる力のモーメントを与え，F_G は F_C による力のモーメントに対抗して車体を安定化させる力のモーメントを与える。接点 P に対する F_C による力のモーメントの大きさを N_C〔N·m〕，F_G による力のモーメントの大きさを N_G〔N·m〕とすると，これらの力のモーメントの大きさ

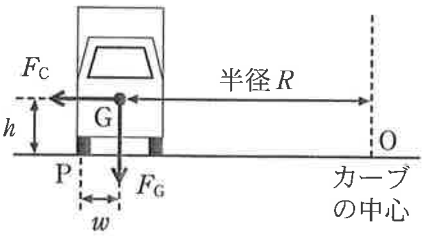


図 2

は，h，w，F_C，F_Gを用いて，

$$N_C = \boxed{\text{シ}},\quad N_G = \boxed{\text{ス}}$$

と表される。N_CとN_Gの大小関係から，車体が横転しない速さv_2の条件を求めると，$\boxed{\text{セ}}$となる。自動車が横転せずに走行できる条件が，その重心位置などに依存することがわかる。

$\boxed{\text{ク}}$の解答群

⓪ $F_C > F_\mu$　① $F_C < F_\mu$　② $F_C = F_\mu$　③ $F_C \leqq F_\mu$

$\boxed{\text{ケ}}$の解答群

⓪ $\sqrt{2\mu gR}$　① $\sqrt{\mu gR}$　② $2\sqrt{\mu gR}$

③ $\sqrt{\frac{1}{2}\mu gR}$　④ $\mu\sqrt{gR}$　⑤ $\frac{1}{2}\sqrt{\mu gR}$

$\boxed{\text{シ}}$・$\boxed{\text{ス}}$の解答群

⓪ wF_C　① hF_C　② $\frac{1}{2}wF_C$　③ $\frac{1}{2}hF_C$

④ wF_G　⑤ hF_G　⑥ $\frac{1}{2}wF_G$　⑦ $\frac{1}{2}hF_G$

$\boxed{\text{セ}}$の解答群

⓪ $v_2 \leqq \sqrt{\frac{gRh}{w}}$　① $v_2 \geqq \sqrt{\frac{gRh}{w}}$　② $v_2 \leqq \sqrt{\frac{gRw}{h}}$

③ $v_2 \geqq \sqrt{\frac{gRw}{h}}$　④ $v_2 \leqq \sqrt{\frac{ghw}{R}}$　⑤ $v_2 \geqq \sqrt{\frac{ghw}{R}}$

第３問 〔解答記号 $\boxed{ア}$ 〜 $\boxed{コ}$ 〕(配点 32)

以下の空欄のうち，$\boxed{ア}$ 〜 $\boxed{カ}$ には，それぞれの解答群から最も適当なものを選んでマークし，それ以外には，当てはまる数字をマークせよ。

給水管，油送管，水冷却管などの管内を流れる流体の持つエネルギーに関する定理にベルヌーイの定理がある。この定理を用いて，円管内を流れる流体（液体）の圧力の変化について考えてみよう。ただし，流体は圧縮性や粘性がなく，定常な流れを考える。

問１ ベルヌーイの定理を導こう。図１に示すように管の断面①を流れる流体の速度を v_1〔m/s〕，圧力を p_1〔Pa〕，断面①の面積を A_1〔m^2〕とし，基準面からの高さを管中心の h_1〔m〕で代表できるものとする。同様に，断面②におけるそれぞれを v_2〔m/s〕，p_2〔Pa〕，A_2〔m^2〕，h_2〔m〕とする。また，流体の密度を ρ〔kg/m^3〕，重力加速度を g〔m/s^2〕とする。

断面①を通過する流体の単位時間当たりの体積（体積流量）Q〔m^3/s〕は，断面積と流体の速度の積で表されることから，次の式(1)となる。

$$Q = \boxed{ア} \qquad (1)$$

流れの連続性により，任意の断面における体積流量も Q となり，断面②における流体の速度 v_2 は，A_1，A_2，v_1 を用いて，次の式(2)となる。

$$v_2 = \boxed{イ}\, v_1 \qquad (2)$$

１秒間に断面①を通過する流体の持つ運動エネルギーは $\dfrac{\rho Q {v_1}^2}{2}$，位置エネルギーは $\rho Q g h_1$，圧力のエネルギーは $Q p_1$ で表されることから，断面①におけるエネルギーの和は $\dfrac{\rho Q {v_1}^2}{2} + \rho Q g h_1 + Q p_1$ となる。管壁と流体の間の摩擦などによるエネルギーの損失を無視すると，断面①におけるエネルギーの和は，断面②のエネルギーの和

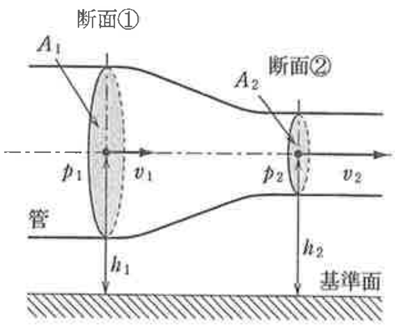


図１

$\dfrac{\rho Q {v_2}^2}{2} + \rho Q g h_2 + Q p_2$ と等しい。このエネルギーの和の式を ρQ で割ることにより，次の式(3)に示すベルヌーイの定理の一般式が得られる。この式は管がどの向きに設置されていても成り立つ。

$$\frac{{v_1}^2}{2} + g h_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{{v_2}^2}{2} + g h_2 + \frac{p_2}{\rho} = \text{一定} \qquad (3)$$

問 2　図１で管が水平に置かれている場合の断面①，②について，圧力と管内を通る流体の速度の関係について調べてみよう。

管が水平に置かれているので $h_1 = h_2$ であり，式(3)に代入すると次式が得られる。

$${v_2}^2 - {v_1}^2 = \boxed{\text{ウ}} \times (p_1 - p_2) \qquad (4)$$

ここで，$A_1 > A_2$ とすると，式(2)から $v_1 < v_2$ となり，式(4)から $p_1 > p_2$ となる。すなわち，速度の大きい断面②において圧力が低下することがわかる。

一方，式(2)と式(4)から v_2 を消去すると，v_1 が次の式(5)のように導かれる。

$$v_1 = \sqrt{\boxed{\text{ウ}} \times \boxed{\text{エ}} \times (p_1 - p_2)} \qquad (5)$$

このように圧力差から速度 v_1 を求めることができる。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $A_1 v_1$	① $\dfrac{v_1}{A_1}$	② $\dfrac{1}{A_1 v_1}$	③ $\dfrac{1}{\rho}$
④ $\dfrac{2}{\rho}$	⑤ 2ρ	⑥ ρg	⑦ $\dfrac{A_1}{A_2}$
⑧ $\dfrac{A_2}{A_1}$	⑨ $\dfrac{A_1 A_2}{A_1 - A_2}$	ⓐ $\dfrac{A_1 - A_2}{A_1 A_2}$	ⓑ $\dfrac{{A_1}^2}{{A_1}^2 - {A_2}^2}$
ⓒ $\dfrac{A_1 A_2}{{A_1}^2 - {A_2}^2}$	ⓓ $\dfrac{{A_2}^2}{{A_1}^2 - {A_2}^2}$		

実際に，ベンチュリー管とよばれる流量測定器では，圧力差 $p_1 - p_2$ を以下の方法により求め，流量を計測している。この方法では，図 2 の管のように一部細い部分を有する管を水平に設置し，流体の速度の異なる断面①および断面②の上に小さい穴を開けて，それぞれの穴に同じ太さの細管を垂直に接合したものを用いる。そうすると，断面①および断面②のそれぞれの位置での流体の圧力に相当する高さ H_1〔m〕，H_2〔m〕の液柱ができる。このとき，それぞれの断面の圧力差は $p_1 - p_2 = \rho g H_1 - \rho g H_2 = \rho g H$ となる(ここで，$H = H_1 - H_2$〔m〕)。したがって，式(1)と式(5)を用いることにより，体積流量 Q は次式により求められる。

$$Q = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}} \qquad (6)$$

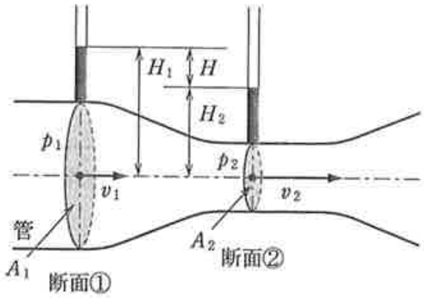


図 2

オ の解答群

⓪ gH	① $\rho g H$	② $2gH$
③ $2\rho g H$	④ $2\rho H$	⑤ $\dfrac{g}{\rho}H$

問 3 次に，管を鉛直に立てた場合について考えてみよう。この場合も，式(3)で示されるベルヌーイの定理の一般式が成り立つ。

まず，図 3 (a)のように断面積が一定の管$(A_1 = A_2)$を鉛直に立てた場合，流れの連続性により，どの断面においても流体の速度は等しい$(v_1 = v_2)$。また，式(3)から，断面①と断面②の圧力の差は $p_1 - p_2 = \boxed{\text{カ}}$ となる。このように断面①と断面②において流体の運動エネルギーが変化しない場合には，位置エネルギーの変化はすべて圧力のエネルギーの変化として現れる。すなわち，$h_1 > h_2$ なので $p_1 < p_2$ となり，断面①の圧力は断面②の圧力よりも低くなることがわかる。

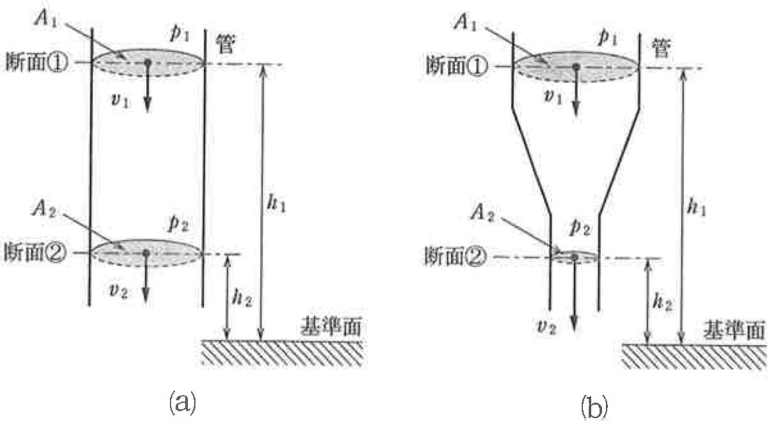


図 3

次に，図 3(b)のように管の下方が細くなっている場合($A_1 > A_2$)の圧力差 $p_1 - p_2$ の具体例を求めてみよう。まず，管の太さが変化する場合，流れの連続性から式(2)で示すように流体の速度が変化する。例えば，断面①において，$A_1 = 1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2}$，$h_1 = 0.70\,\mathrm{m}$，$v_1 = 0.20\,\mathrm{m/s}$ とし，断面②において，$A_2 = 5.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2}$，$h_2 = 0.10\,\mathrm{m}$ とすると，断面②における流体の速度 v_2 は，式(2)から，$\boxed{キ}.\boxed{ク}$ m/s となる。重力加速度を $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，流体の密度を $\rho = 1.0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ とすると，圧力差は，式(3)を用いることにより，$p_1 - p_2 = \boxed{ケ}.\boxed{コ} \times 10^3\,\mathrm{Pa}$ となる。この場合，$h_1 > h_2$ にもかかわらず断面①の圧力は断面②の圧力よりも高くなることがわかる。

流体の流れる管の断面積の変化，配置の仕方などにより，管内の流体の圧力は変化する。流体の圧力がある値(飽和蒸気圧)よりも低くなると，流体中に気泡が生じ，この気泡が管内の圧力の高い場所に移動すると気泡は崩壊する。このため，騒音や振動が発生したり，管が損傷したりすることがある。このような現象をキャビテーションという。キャビテーションを防ぐためにも，圧力の急激な変動が生じないような設計が必要となる。

$\boxed{カ}$ の解答群

⓪ $\rho g(h_1 + h_2)$	① $\rho g(h_1 - h_2)$	② $\rho g(h_2 - h_1)$
③ $\dfrac{g}{\rho}(h_1 + h_2)$	④ $\dfrac{g}{\rho}(h_1 - h_2)$	⑤ $\dfrac{g}{\rho}(h_2 - h_1)$