数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔1〕　連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots ① \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \quad \cdots\cdots ③$$

とする。このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう。

2 倍角の公式を用いると，① から

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$$

が得られる。また，② から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{オ}}{15}$ である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

したがって，条件 ③ を用いると

$$\cos^2\alpha = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \quad \cos^2\beta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。よって，② と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad \cos\beta = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

〔2〕 座標平面上に点 $A\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ をとり，関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上に2点 $B(p,\ \log_2 p)$，$C(q,\ \log_2 q)$ をとる。線分ABを1：2に内分する点がCであるとき，p，q の値を求めよう。

真数の条件により，$p >$ $\boxed{\text{タ}}$，$q >$ $\boxed{\text{タ}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

線分ABを1：2に内分する点の座標は，p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p,\quad \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p + \boxed{\text{ナ}}\right)$$

と表される。これがCの座標と一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p = q & \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p + \boxed{\text{ナ}} = \log_2 q & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

⑤は

$$p = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} q^{\boxed{\text{ネ}}} \quad \cdots\cdots ⑥$$

と変形できる。④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p > \boxed{\text{タ}}$，$q > \boxed{\text{タ}}$ に注意すると

$$p = \boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}, \quad q = \boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$$

である。

また，C の y 座標 $\log_2\left(\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}\right)$ の値を，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると，$\boxed{\text{ヘ}}$ である。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つ選べ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

⓪ 0.3	① 0.6	② 0.9	③ 1.3	④ 1.6	⑤ 1.9
⑥ 2.3	⑦ 2.6	⑧ 2.9	⑨ 3.3	ⓐ 3.6	ⓑ 3.9

数学Ⅱ

第2問 （配点　30）

Oを原点とする座標平面上の放物線 $y = x^2 + 1$ を C とし，点 $(a,\ 2a)$ をPとする。

(1) 点Pを通り，放物線 C に接する直線の方程式を求めよう。

C 上の点 $(t,\ t^2 + 1)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\,tx - t^2 + \boxed{\text{イ}}$$

である。この直線がPを通るとすると，t は方程式

$$t^2 - \boxed{\text{ウ}}\,at + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}} = 0$$

を満たすから，$t = \boxed{\text{カ}}\,a - \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。よって，

$a \neq \boxed{\text{ケ}}$ のとき，Pを通る C の接線は2本あり，それらの方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}}\,a - \boxed{\text{サ}}\right)x - \boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と

$$y = \boxed{\text{セ}}\,x$$

である。

(2) (1)の方程式①で表される直線を ℓ とする。ℓ と y 軸との交点をR$(0,\ r)$とすると，$r = -\boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a$ である。$r > 0$ となるのは，

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のときであり，このとき，三角形OPRの面積 S は

$$S = \boxed{\text{チ}}\left(a^{\boxed{\text{ツ}}} - a^{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

となる。

（数学Ⅱ第2問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，S の増減を調べると，S は $a = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ をとることがわかる。

(3) $\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，放物線 C と(2)の直線 ℓ および2直線 $x = 0$，$x = a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} a^3 - \boxed{\text{ヒ}} a^2 + \boxed{\text{フ}}$$

である。$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq a < \boxed{\text{タ}}$ の範囲において，T は $\boxed{\text{ヘ}}$。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 減少する
① 極小値をとるが，極大値はとらない
② 増加する
③ 極大値をとるが，極小値はとらない
④ 一定である
⑤ 極小値と極大値の両方をとる

第3問 (配点　20)

座標平面上に2点A(0, 3), B(8, 9)をとる。

(1)　2点A, Bを通る直線の方程式は $y = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　線分ABの長さは $\boxed{\text{エオ}}$ である。

(3)　線分ABを直径とする円 C の方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{カ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{キ}}\right)^2 = \boxed{\text{クケ}}$$

である。また, Aにおける C の接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x + \boxed{\text{ス}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(4) 三角形ABPの面積が20である点Pの軌跡は，2直線

$$y = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x + \boxed{\text{タ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と

$$y = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x - \boxed{\text{チ}}$$

である。

(5) 直線①と直線②の交点の x 座標は $\frac{\boxed{\text{ツテト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であり，円 C と直線②の交点の x 座標は $\boxed{\text{ニ}}$ と $\frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

(6) 三角形ABPの面積が20であり，かつ三角形ABPが直角三角形であるような点Pは全部で $\boxed{\text{ハ}}$ 個ある。

第４問 （配点　20）

(1)　4次式 $P(x)$ は，x^4 の係数が1で，x^2-2x+3 で割り切れるとする。また，$P(x)$ は $P(1)=12$，$P(2)=15$ を満たすとする。

$P(x)$ を x^2-2x+3 で割った商を $S(x)=x^2+mx+n$　(m，n は実数)

とおくと，$S(1)=\boxed{\text{ア}}$，$S(2)=\boxed{\text{イ}}$ であるから，$m=\boxed{\text{ウエ}}$，

$n=\boxed{\text{オ}}$ である。方程式 $S(x)=0$ の解は

$$\boxed{\text{カ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,i$$

である。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(2)　2次式 $Q(x) = x^2 + kx + \ell$（k，ℓ は実数）を考える。c を正の実数として，$\alpha = c + \dfrac{1}{c}i$ とする。方程式 $Q(x) = 0$ は複素数 α を解にもつとする。

$Q(x)$ の x に α を代入すると

$$Q(\alpha) = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{c^2} + c^2 + \boxed{\text{コ}}\,k + \ell + \left(\boxed{\text{サ}} + \frac{k}{c}\right)i$$

となる。k，ℓ を c を用いて表すと，$k = \boxed{\text{シスセ}}$，$\ell = \dfrac{c^{\boxed{\text{ソ}}} + \boxed{\text{タ}}}{c^2}$ である。

二項定理から，α の4乗は $\alpha^4 = \boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}}\,i$ となる。$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜ⓑのうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $3\left(c^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)$　① $4\left(c^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)$　② $6\left(c^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)$

③ $3\left(c^2 - \dfrac{1}{c^2}\right)$　④ $4\left(c^2 - \dfrac{1}{c^2}\right)$　⑤ $6\left(c^2 - \dfrac{1}{c^2}\right)$

⑥ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} + 4\right)$　⑦ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} + 6\right)$　⑧ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} + 10\right)$

⑨ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} - 4\right)$　ⓐ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} - 6\right)$　ⓑ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} - 10\right)$

相加平均と相乗平均の関係から，c が $c > 0$ の範囲を動くとき，α^4 の実部 $\boxed{\text{チ}}$ は $c = \boxed{\text{テ}}$ で最小値 $\boxed{\text{トナ}}$ をとり，そのとき，$k = \boxed{\text{ニヌ}}$，$\ell = \boxed{\text{ネ}}$ である。