数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第1問 (配点　30)

〔1〕

(1) $8^{\frac{5}{6}} = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$, $\log_{27}\dfrac{1}{9} = \dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは $\boxed{\text{キ}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boxed{\text{ク}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$ のグラフは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 同一のもの

① x 軸に関して対称

② y 軸に関して対称

③ 直線 $y = x$ に関して対称

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(3) $x > 0$ の範囲における関数 $y = \left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 4\log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ とおく。このとき，$y = t^2 - \boxed{コ}\,t + \boxed{サ}$ である。また，x が $x > 0$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は $\boxed{シ}$ である。$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $t > 0$　　① $t > 1$

② $t > 0$ かつ $t \neq 1$　　③ 実数全体

したがって，y は $t = \boxed{ス}$ のとき，すなわち $x = \boxed{セ}$ のとき，最小値 $\boxed{ソタ}$ をとる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 k を正の定数として

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x について考える。

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x の個数について考えよう。

① の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ，2倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{チ}}} - k\right)\cos 2x = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。したがって，k の値に関係なく，$x = \frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときはつねに ① が成り立つ。また，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leqq 1$ であるから，$k > \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき，① を満たす x は $\frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のみである。一方，$0 < k < \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき，① を満たす x の個数は $\boxed{\text{ナ}}$ 個であり，$k = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のときは $\boxed{\text{ニ}}$ 個である。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

(2) $k = \dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x について考えよう。

②により $\sin 2x = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ であるから

$$\cos 2x = \dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。したがって

$$\cos x = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

第２問 （配点　30）

座標平面上で，放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ を C_1 とし，放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ を C_2 とする。

(1)　実数 a に対して，２直線 $x = a$，$x = a + 1$ と C_1，C_2 で囲まれた図形 D の面積 S は

$$S = \int_a^{a+1} \left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}} x^2 + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}} \right) dx$$

$$= \frac{a^2}{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{a}{\boxed{\text{エ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。S は $a = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で最小値 $\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ をとる。

(2)　４点 $(a,\ 0)$，$(a + 1,\ 0)$，$(a + 1,\ 1)$，$(a,\ 1)$ を頂点とする正方形を R で表す。a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，正方形 R と(1)の図形 D の共通部分の面積を T とおく。T が最大となる a の値を求めよう。

直線 $y = 1$ は，C_1 と $\left(\pm \boxed{\text{ソ}},\ 1\right)$ で，C_2 と $\left(\pm \boxed{\text{タ}},\ 1\right)$ で交わる。したがって，正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{チ}}$ のときである。

（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{ソ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{チ}}$ のとき，正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり，この範囲で a が増加するとき，T は $\boxed{\text{ツ}}$。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ 増加する　　① 減少する　　② 変化しない

したがって，T が最大になる a の値は，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ の範囲にある。

$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ のとき，(1)の図形 D のうち，正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U = \frac{a^3}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{a^2}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。よって，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ において

$$T = -\frac{a^3}{\boxed{\text{ナ}}} - \frac{a^2}{\boxed{\text{ニ}}} + \frac{a}{\boxed{\text{ヌ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である。① の右辺の増減を調べることにより，T は

$$a = \frac{\boxed{\text{ネノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

で最大値をとることがわかる。

第3問 （配点 20）

座標平面上に4点A(−1, 0)，B(1, 0)，P(−1, 3)，Q(1, 1)がある。線分PQ上に点Rをとり，そのx座標をaとする。さらに，三角形ABRの外接円をCとし，その中心をSとする。

(1) 点Rの座標をaを用いて表すと

$$\left(a,\quad \boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。

また，線分ARの中点をMとする。Mの座標をaを用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \frac{\boxed{\text{キク}}+\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$$

である。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

(2) 外接円 C の中心Sは，線分ABの垂直二等分線と，線分ARの垂直二等分線 ℓ との交点である。このことを用いてSの座標を求めよう。

線分ABの垂直二等分線は y 軸である。また，ℓ は，(1)の点Mを通り，傾き $\dfrac{a+\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}}$ の直線である。

以上のことから，Sの座標は

$$\left(\boxed{\text{セ}},\quad \frac{\boxed{\text{ソタ}}\,a^2+\boxed{\text{チ}}\,a-\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}\,a-\boxed{\text{ト}}}\right)$$

であることがわかる。

(3) 円 C が点Rで直線PQに接するときの a の値を求めよう。

C が直線PQに接するとき，直線RSの傾きは $\boxed{\text{ナ}}$ である。このことと，$-1 \leqq a \leqq 1$ であることから，$a=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}-\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

第４問 （配点　20）

(1)　4次方程式 $x^4 + 2x^2 + 25 = 0$ の解を求めよう。

$t = x^2$ とおいて得られる2次方程式 $t^2 + 2t + 25 = 0$ の判別式を D とするとき

$$D = \boxed{\text{アイウ}}$$

であり，2次方程式の解は

$$t = \boxed{\text{エオ}} \pm \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,i$$

である。2乗すると虚数 t になる複素数を求める代わりに，以下のように考える。

上の4次方程式を，正の実数 A，B により $(x^2 + A)^2 - Bx^2 = 0$ と変形すると

$$A = \boxed{\text{ク}},\quad B = \boxed{\text{ケ}}$$

である。

したがって，等式

$$(x^2 + A)^2 - Bx^2 = (x^2 + \sqrt{B}\,x + A)(x^2 - \sqrt{B}\,x + A)$$

を利用すると，4次方程式 $x^4 + 2x^2 + 25 = 0$ の解は

$$x = -\sqrt{\boxed{\text{コ}}} \pm \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\,i,\quad \sqrt{\boxed{\text{コ}}} \pm \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\,i$$

であることがわかる。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(2) q, rを実数として，整式$P(x)=x^3-2x^2+qx+2r$を考える。3次方程式$P(x)=0$の解が-2と二つの自然数α, β $(\alpha<\beta)$であるとき，α, βとq, rを求めよう。

$P(-2)=0$であるから，$r=q+\boxed{\text{シ}}$である。したがって，因数定理により

$$P(x)=(x+2)\left(x^2-\boxed{\text{ス}}\,x+q+\boxed{\text{セ}}\right)$$

となる。

ここで，2次方程式

$$x^2-\boxed{\text{ス}}\,x+q+\boxed{\text{セ}}=0$$

は，二つの自然数α, β $(\alpha<\beta)$を解にもつから

$$\alpha=\boxed{\text{ソ}},\quad \beta=\boxed{\text{タ}},\quad q=\boxed{\text{チツ}},\quad r=\boxed{\text{テ}}$$

である。

（下 書 き 用 紙）